L'INFINI EN SCIENCES PHYSIQUES

Par Anne Martini

La notion d'infini intervient dans de nombreux domaines des sciences physiques. Cet exposé vise à en donner une brève présentation.

1. L'infini et l'énergie

1.1. Constante d'équilibre chimique

En chimie, une réaction chimique est modélisée par l'équation bilan suivante :

$$\nu_a A + \nu_b B \rightleftarrows \nu_c C + \nu_d D$$

On lui associe une constante d'équilibre, définit par :

$$K = \frac{[C]^{\nu_c}[D]^{\nu_d}}{[A]^{\nu_a}[B]^{\nu_b}} = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

avec [A], la concentration de l'espèce A,…, E_a l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits et T la température exprimée en Kelvin.

Lorsque [A] (ou [B], ou les deux) tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque que la réaction est totale, K tend vers l'infini.

Dans la réalité, K a toujours une valeur finie, qui peut être très grande, mais finie. Lorsque [A] tend vers zéro, il y a très peu de molécules d'espèce A dans le milieu réactionnel, et elles sont trop peu nombreuses pour rencontrer les molécules de l'espèces B. Donc il en reste toujours un très petit nombre (infiniment petit) dans le milieu réactionnel. On dit alors que la réaction est ***quasi-totale***.

1.2. Energie en mécanique newtonienne

1.2.1. Energie cinétique

Pour un système de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$, l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Cette quantité est toujours bornée, car la vitesse est bornée par la valeur de la célérité c de la lumière (c = 299 792 458 m/s). Donc l'énergie cinétique ne peut pas tendre vers l'infini.

L'énergie ne peut pas tendre vers l'infini à cause de la valeur bornée de la vitesse.

1.2.2. Energie potentielle

1.2.2.1. Energie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique pour un ressort de raideur *k* et dont l'allongement vaut *x*, s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Cette quantité peut tendre vers l'infini si *x* tend vers l'infini. Mais alors le domaine d'application de cette relation n'est plus valable, cette relation est vérifiée dans le domaine d'élasticité du ressort. Lorsque l'on sort de ce domaine, il y a rupture du ressort et il faut passer à une autre modélisation pour le ressort.

L'infini semble être atteint, mais ceci est dû à une mauvaise utilisation du modèle proposé.

1.2.2.2. Energie potentielle de pesanteur

Les différents domaines d'application pour une formule peuvent être illustrés sur l'énergie potentielle de pesanteur :

En effet, lorsque le système étudié est au voisinage de la surface de la Terre, l'énergie potentielle de pesanteur est caractérisée par la relation :

$$E_p = mgh$$

h étant l'altitude du système, *g* (g = 9,81 m.s^{-2})le champ de pesanteur, et *m* la masse du système.

Lorsque le système s'éloigne de la surface de la Terre, cette énergie prend la forme suivante :

$$E_p = \frac{GM_T m}{r}$$

avec G (G = 6,672.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}) la constante de gravitation universelle, M_T (M_T = 5,97.10^{24} kg) la masse de la Terre et *r* la distance système-Terre.

Dans la première relation, on voit que lorsque *h* tend vers l'infini, l'énergie potentielle tend vers l'infini, mais en fait c'est la deuxième relation qui faut utiliser, et on voit que lorsque *r* tend vers l'infini, cette énergie tend vers zéro. Par contre, elle semble diverger lorsque *r* tend vers zéro, mais il faut utiliser la première relation.

Au vu de ces exemples, il semble bien difficile de trouver un infini en sciences physiques. Et miracle, il y a un exemple qui semble nous procurer un infini.

1.2.2.3. Energie potentielle effective d'interaction au sein de la matière

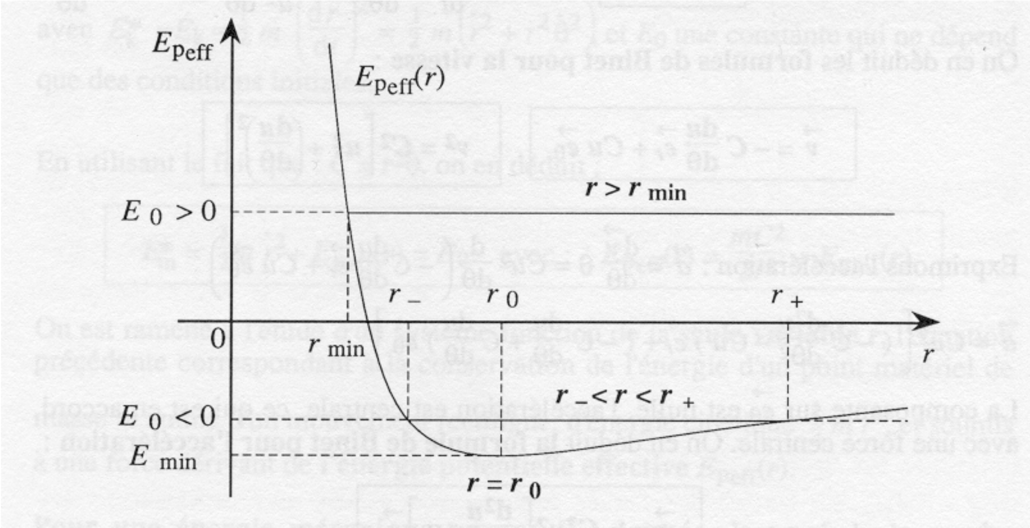
L'étude de l'énergie mécanique d'un système de deux particules en interaction permet de mettre en évidence une énergie de potentielle qui tend vers l'infini.

Dans le cas de forces intérieures conservatives d'un système isolé de deux particules, on peut écrire l'énergie mécanique du système dans un référentiel barycentrique sous une forme simplifiée. On décompose l'énergie cinétique comme une somme de deux termes et on fait apparaître une énergie potentielle effective :

$$E^*_m = E_c + E_p$$

$$E_m{}^* = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r) = E_0 \textbf{ avec } E_{peff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_{p\,\mathrm{int}}(r)$$

Le tracé de cette fonctionne est représenté ci-dessous :



On voit que lorsque r tend vers zéro, cette énergie diverge et tend vers l'infini. En fait encore dans ce cas, cet infini apparaît lorsque l'on fait une utilisation illicite du modèle.

En effet, les deux particule en interaction peuvent être modélisées par des sphères dures. Or lorsque ces sphères sont au contact l'une de l'autre, r ne peut pas tendre vers l'infini. La valeur la plus petite que peut prendre r est égale à la somme des rayons des deux sphères. Cette limite infinie traduit l'impossibilité d'interpénétration des nuages électroniques. Elle rend compte de la notion de ***barrière de potentiel.***

Conclusion : Une énergie potentielle effective qui tend vers l'infini traduit l'impossibilité pour le système d'atteindre des états situés au-delà de cette barrière.

1.2.3. Puissance et continuité de l'énergie en mécanique newtonienne

La puissance est définie par la relation suivante :

$$P = \frac{dE}{dt}$$

La puissance traduit la variation d'énergie au cours du temps.

Si la puissance tend vers l'infini, cela veut dire que l'on a fait varier l'énergie du système de façon instantanée. Or ce phénomène n'est jamais observé en mécanique newtonienne. Ce ci implique que l'énergie d'un système est toujours continue. Cette conséquence fait partie des fondements de la physique déterministe.

Par exemple, l'énergie cinétique est une grandeur continue, donc la vitesse est une grandeur continue, c'est-à-dire qu'elle varie continûment d'une valeur à une autre (Cette variation peut être importante sur un temps très court, mais elle est continue).

D'autre part, en électronique, la continuité de l'énergie emmagasinée par un condensateur est continue, or cette énergie est fonction de la charge aux bornes du condensateur, dons la charge est une grandeur continue aux bornes d'un condensateur. De même, l'énergie emmagasinée par une bobine est continue, or celle-ci dépend de l'intensité de courant qui traverse la bobine, donc l'intensité de courant est continue à la traversée d'une bobine. Ces deux considérations ont de grandes répercutions en électrocinétique.

En mécanique quantique, il en va tout autrement. L'énergie est quantifiée, c'est-à-dire discontinue. L'énergie d'un système peut varier brutalement sur un temps très court. Par exemple, lors d'une émission laser, l'atome qui était dans un état excité perd un ou plusieurs photons. Mais la puissance n'est pas pour autant une quantité qui tend vers l'infini. L'émission d'un photon étant brève, mais non instantanée (de l'ordre de 10^{-7} ou 10^{-8} s).

2. L'infini et les discontinuités

Le problème concerne la plupart des lois de la physique qui s'expriment généralement à l'aide d'équations où interviennent les dérivées de certaines quantités. C'est la cas de l'équation de diffusion de la chaleur. Mais que se passe-t-il si les dérivées de ces quantités n'existaient pas ? Ce cas se produit lorsqu'on considère la propagation de la chaleur dans un matériau poreux. Dans ce cas, Lindstrøm propose une nouvelle définition de la dérivée : la dérivée de la température à un instant donné est alors définie comme le taux de variation au cours du temps de la moyenne de la température en chacun des points voisins du point considéré, chacun d'eux étant affecté d'un poids d'autant plus fort que la probabilité de l'atteindre est plus élevée. Le nombre de points choisis est très grand.

3. L'infini dans le dénombrement des états accessibles au système

3.1. Importance du dénombrement

Le dénombrement des états accessibles au système est une partie importante de la physique. En effet, lorsque l'on s'intéresse à la physique statistique, l'évolution d'un système dépend de son entropie.

Tout système physique tend à augmenter son entropie de façon à la maximiser.

Or, la mécanique statistique montre que l'entropie d'un système est proportionnelle au logarithme du nombre d'états accessibles au système. C'est-à-dire que plus les états microscopiques représentant un état macroscopique sont nombreux, plus l'état macroscopique s'imposera au système.

Il est donc nécessaire de dénombrer les états accessibles d'un système pour connaître son évolution ultérieure.

3.2. Possibilité de dénombrement en mécanique newtonienne

Si on considère une particule de vecteur position $\vec{r}$ et de vecteur vitesse $\vec{v}$, il existe une infinité de combinaison possibles du type $(\vec{r},\vec{v})$. Il existe donc une infinité d'états accessibles au système (même si l'on considère que la vitesse est bornée). Par contre, si l'on prend en compte la sensibilité des appareils de mesure, la valeur du vecteur position est connue à $\delta\vec{r}$ près, de même pour le vecteur vitesse qui est connu à $\delta\vec{v}$ près. On introduit ainsi un « pas » artificiel, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs possibles pour les couples $(\vec{r},\vec{v})$ se divise en un nombre fini d'intervalles. On peut dons dénombrer les états accessibles au système en passant d'une connaissance continue à une connaissance discontinue du système.

3.3. Dénombrement en mécanique quantique

Le dénombrement des états accessibles au système se retrouve aussi en mécanique quantique. Le concept de particule est inexistant. On adopte celui de paquet d'onde qui n'est pas parfaitement localisé dans l'espace (Incertitudes de Heisenberg). On fait des statistiques sur les états accessibles au système et on raisonne en termes de probabilité de présence d'une particule en un point particulier.

3.4. Quelques résultats issus de la mécanique statistique

Cette vision des choses a conduit les physiciens à des résultats surprenants.

Si l'on considère un écoulement fluide, constitué d'un grand nombre de particules fluide, il y a un nombre très grand d'états accessibles au système. Ce nombre paraît si grand, il ne semble pas que le système puisse atteindre un état macroscopique bien défini, et l'on aboutit à un système chaotique ou turbulent (à ce problème peut se rajouter une sensibilité aux conditions initiales).

Pourtant, dans certains cas, on observe pour des écoulement turbulents particuliers un état macroscopique privilégié que le système atteint à bout d'un certains temps. Des structures cohérentes apparaissent dans l'écoulement. Ceci s'explique par la physique statistique, qui appliquée à ce type d'écoulement fait ressortir un état plus probable que les autres et c'est celui que l'on observe au bout d'un certain temps.

Ces considération ont permis de s'affranchir de l'effet papillon en météorologie. Les équations qui régissent les écoulements de fluide atmosphérique sont très sensibles aux conditions initiales, de telle sorte que le battement d'aile d'un papillon à Tokyo pouvait provoquer un ouragan sur la côte ouest des Etats Unis. Or la physique statistique a montré qu'il n'en était rien et que le système n'est pas aussi sensible aux conditions initiales qu'on le croyait, mais que pour prédire la météo à plus long terme, il faut augmenter le nombre de paramètres pris en compte.

Le dénombrement peut s'avérer difficile à mettre en œuvre. Le nombre des états accessibles a beau être une quantité finie, elle n'en est pas pour le moins facile à acquérir.

De la même manière, un tas de sable contient une quantité de grains qui n'est ni infinie ni aisément accessible.

La physique pose le problème de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Nous allons voir que dans la suite, il est difficile d'en donner une définition correcte.

4. Notion relative de l'infini en sciences physiques

4.1. Analyse non standard

4.1.1. L'infini en acte et l'infini potentiel

La notion d'infiniment petit et d'infiniment grand est une notion toute relative, comme nous allons l'illustrer dans la suite.

Reprenons l'exemple des grains de sable. Archimède consacra un long travail (au troisième siècle av J-C) au dénombrement des grains de sable qui emplissent la surface de la Terre entière. Comme la totalité des grains de sable est inépuisable et le dénombrement inachevable, Archimède en conclut que la suite des nombres entiers n'a pas de fin et peut donc être prolongée à l'infini.

Pour Aristote, l'infini c'est ce qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de limite. N'ayant pas de limite, il ne peut être déterminé et n'existe pas en soi. L'infini est la négation du fini. Aristote admettait la nécessité de penser l'infini, mais il déniait toute existence physique ou mathématique à l'infini. Pour lui, le mathématicien a certes besoin d'envisager des grandeurs plus grandes, ou plus petites, que toute grandeur donnée, mais nullement de considérer des totalités infinies en acte, déterminées quoique non limitées. Si l'infini mathématique relève de la catégorie de la quantité, c'est seulement en tant qu'infini potentiel, c'est-à-dire quantité qui peut devenir toujours plus grande ou plus petite sans que jamais ce devenir ne se transforme en être. Cette victoire conceptuelle de l'infini potentiel sur l'infini actuel traversa les siècles pour parvenir jusqu'à nous. L'infini en acte existe mais il n'est pas nombrable. Il existe des ensembles d'infinis en acte que rien logiquement n'empêche de concevoir comme des touts achevés. Ainsi l'ensemble des entiers, une droite infinie, un segment comportent bien une infinités d'éléments conceptuellement parfaitement déterminés et saisissables. Il suffit de caractériser l'ensemble par une ou plusieurs propriétés : une relation de récurrence simple définit la suite des entiers, la donnée de deux points détermine un segment de droite ou une droite…

4.1.2. Naissance de l'analyse non standard

Du côté des mathématiques, c'est la naissance de la physique galiléenne qui a relancé l'ouvrage. La nécessité de définir les concepts de vitesse instantanée et d'accélération, de formuler les lois du mouvement, de généraliser le concept de courbe ont débouché sur des concepts de fonction et de différentielle. Le calcul infinitésimal, cette nouvelle science de l'infini inventée simultanément par Isaac Newton (1642-1727) et par Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716) introduit des éléments infinitésimaux qui représentent des quantités infiniment petites. On y distingue différents ordres d'infini, et on détermine les règles permettant de les comparer entre eux et avec le fini :

- un infiniment petit, ajouté ou enlevé à une quantité finie, est négligeable car incomparablement plus petit qu'elle ;
- on ne change pas l'ordre d'un infiniment grand en lui ajoutant une quantité finie (x du même ordre que $x+100$ lorsque x tend vers l'infini).
- un infiniment grand d'ordre inférieur est négligeable devant un infiniment grand d'ordre supérieur (x est négligeable devant x^2 lorsque x tend vers l'infini).
- de même, un infiniment petit est négligeable devant un infiniment petit d'ordre inférieur ($1/x^2$ est négligeable devant $1/x$).

<u>*Paradoxe :*</u> cette conception de l'infini a eu du mal a s'imposer car G. Berkeley souleva un paradoxe. Partant du principe que la somme de deux infiniment petits est encore un infiniment petit, on ajoute à lui-même un tel nombre δ, et on obtient 2δ, 3δ, … $N\delta$. Survient le moment où la goutte fait déborder le vase : si $N\delta$ est le dernier de ces infiniment petits $(N+1)\ \delta$ ne l'est plus, ce qui est absurde puisqu'il est la somme de deux infiniment petits.

Ce paradoxe a depuis été levé.

L'analyse non standard offre un moyen d'étudier un objet à plusieurs échelles.

4.2. Infiniment petit et infiniment grand

La notion d'infini n'est peut-être après tout en Sciences physiques, qu'une notion d'échelle. A l'échelle humaine, l'infiniment grand et l'infiniment petit existent, notre environnement le prouve.